

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2020 - Εισαγωγή στην Τοπολογία (Α. Τόλιας)

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα σωστά.

Ερώτηση 1. Θεωρούμε το μετρικό χώρο (\mathbb{R}, ρ) με ρ διακριτή μετρική και το σύνολο $A = (0, 3]$. Τότε, το σύνολο A είναι:

- (i) Ανοιχτό
- (ii) Κλειστό
- (iii) Φροαγμένο
- (iv) Πλήρες
- (v) Συμπαγές
- (vi) Συνεκτικό

Ερώτηση 2. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X (όπου I κάποιο μη κενό σύνολο) και $A = \bigcap_{i \in I} A_i$.

- (i) Αν το I είναι πεπερασμένο και το A_i ανοιχτό και πυκνό για κάθε $i \in I$ τότε A είναι πυκνό.
- (ii) Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης και το A_i είναι ανοιχτό και πυκνό για κάθε $i \in I$, τότε A είναι πυκνό.
- (iii) Αν I πεπερασμένο και το A_i είναι πυκνό για κάθε $i \in I$, τότε A είναι πυκνό.
- (iv) Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης, το I είναι αριθμήσιμο και το A_i είναι ανοιχτό και πυκνό για κάθε $i \in I$, τότε το A είναι πυκνό.

Ερώτηση 3. Έστω (K, ρ) , (L, d) δύο μετρικοί χώροι και $f: K \rightarrow L$ ώστε f να 'ναι ομοιομορφισμός. Τότε:

- (i) Η $f^{-1}: L \rightarrow K$ είναι ομοιομορφισμός.
- (ii) Αν ο (K, ρ) είναι συμπαγής, ο (L, d) είναι σύμπαγης.
- (iii) Αν ο (K, ρ) είναι συνεκτικός, ο (L, d) είναι συμπαγής.
- (iv) Αν ο (K, ρ) είναι πλήρης, ο (L, d) είναι πλήρης.

Ερώτηση 4. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και A είναι υποσύνολο του X . Το A είναι ανοιχτό αν και μόνο αν:

- (i) Κάθε εσωτερικό σημείο του A ανήκει στο A .
- (ii) Κάθε σημείο του A είναι εσωτερικό τσημείο του A .
- (iii) Όλα τα σημεία επαφής του A ανήκουν στο A .
- (iv) Το σύνορο του A είναι το κενό σύνολο.

- (v) Το A δεν έχει σημεία επαφής.
- (vi) Το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

Ερώτηση 5. Θεωρούμε το \mathbb{R} με τη συνήθη μετρική και A, B, Γ, Δ τέσσερα υποσύνολα του \mathbb{R} ώστε το A να είναι συμπαγές, το B κλειστό και φραγμένο, Γ φραγμένο και Δ ανοιχτό. Έστω επίσης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε:

- (i) Το A είναι κλειστό.
- (ii) Το A είναι φραγμένο.
- (iii) Το B είναι συμπαγές.
- (iv) Το $\bar{\Gamma}$ είναι συμπαγές.
- (v) Το $f(\bar{\Gamma})$ είναι κλειστό.
- (vi) Το $f(\Delta)$ είναι ανοιχτό.

Ερώτηση 6. Στον \mathbb{R} με τη συνήθη μετρική θεωρούμε το σύνολο

$$A = ((0, 1) \cap \mathbb{Q}) \cup ([2, \pi] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{8\}.$$

Ποιες από τις παρακάτω είναι αληθείς;

- (i) Το $\frac{1}{2}$ είναι εσωτερικό σημείο του A .
- (ii) Το 3 είναι σημείο συσσώρευσης του A .
- (iii) Το 8 είναι σημείο επαφής του A .
- (iv) Το 8 είναι σημείο συσσώρευσης του A .
- (v) Το 8 είναι συνοριακό σημείο του A .
- (vi) Το 1 είναι συνοριακό σημείο του A .

Ερώτηση 7. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X (όπου I είναι κάποιο μη κενό σύνολο) και $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, $B = \bigcap_{i \in I} A_i$.

- (i) Αν το I είναι πεπερασμένο και τα A_i , $i \in I$ είναι κλειστά, τότε το A είναι κλειστό.
- (ii) Αν το I είναι αριθμήσιμο και τα A_i , $i \in I$ είναι κλειστά, τότε το A είναι κλειστό.
- (iii) Αν το I είναι πεπερασμένο και τα A_i , $i \in I$ είναι ανοιχτά, τότε το A είναι ανοιχτό.
- (iv) Αν το I είναι αριθμήσιμο και τα A_i , $i \in I$ είναι ανοιχτά, τότε το A είναι ανοιχτό.
- (v) Αν τα A_i , $i \in I$ είναι συμπαγή, τότε το B είναι συμπαγές.
- (vi) Αν τα A_i , $i \in I$ είναι συνεκτικά, τότε το B είναι συνεκτικό.

Ερώτηση 8. Στον \mathbb{R}^2 με την ευκλείδεια μετρική, θεωρούμε το σύνολο:

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 16\} \cup \{(x, y) : y = 2x\}.$$

Τότε

- (i) Το $(4, 0)$ είναι εσωτερικό σημείο του A
- (ii) Το $(0, 4)$ είναι σημείο συσσώρευσης του A .
- (iii) Το $(-4, 0)$ είναι σημείο επαφής του A .
- (iv) Το $(0, -4)$ είναι συνοριακό σημείο του A .
- (v) Το $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ είναι εσωτερικό σημείο του A .
- (vi) Το $(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{\sqrt{5}})$ είναι εσωτερικό σημείο του A .
- (vii) Το A° είναι φραγμένο.

Ερώτηση 9. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και A είναι υποσύνολο του X . Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν:

- (i) Κάθε εσωτερικό σημείο του A ανήκει στο A .
- (ii) Κάθε σημείο του A είναι εσωτερικό σημείο του A .
- (iii) Κάθε σημείο του A είναι σημείο επαφής του A
- (iv) Το σύνορο του A είναι το κενό σύνολο.
- (v) Όλα τα σημεία επαφής του A ανήκουν στο A .
- (vi) Το εσωτερικό του A είναι κενό σύνολο.

Ερώτηση 10. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, A ένα υποσύνολο του X , x ένα σημείο του X ώστε $x \notin A$, $X = A \cup \{x\}$ και το A να είναι πυκνό στον X .

- (i) Το A είναι ανοιχτό.
- (ii) Το A είναι κλειστό.
- (iii) Το A είναι πλήρες.
- (iv) Το A είναι συμπαγές.
- (v) Το A είναι συνεκτικό.
- (vi) Το $\{x\}$ είναι συμπαγές.
- (vi) Το x είναι μεμονωμένο σημείο του X .
- (vi) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του X .
- (vi) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A .